

ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ И ОСОБЕННОСТИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МОДЕЛЯХ ГЕОДИНАМО

© 2017 г. А. В. Хохлов^{1, 2, *}, Ф. Люлье³, В. П. Щербаков^{2, 4, 5}

¹Институт теории прогноза землетрясений, г. Москва

²Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва

³Университет имени Людвиг-Максимилиана, г. Мюнхен

⁴Казанский (Приволжский) Федеральный университет, г. Казань

⁵ГО Борк ИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН, п. Борк, Ярославская область

*E-mail: fbmotion@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.03.2017 г.

Анализ статистических характеристик геомагнитного поля, генерируемого в численных моделях геодинamo, показал, что распределение сферических гармонических коэффициентов в ряде случаев не является гауссовым, а сходно с распределением Лапласа. Форма соответствующих гистограмм зависит от масштаба времени, что позволяет дать интерпретацию полученных данных в терминах смеси гауссовых распределений. Аналогичные эффекты, связанные с перемежаемостью, экспериментально наблюдались в турбулентных потоках жидкости. Таким образом, поведение вековых вариаций магнитного поля Земли возможно следует описывать в терминах смеси нескольких гауссовских стационарных процессов, отвечающих переключениям разных режимов генерации геодинamo.

DOI: 10.7868/S0002333717050076

ВВЕДЕНИЕ

Вековые вариации геомагнитного поля являются одной из важнейших поведенческих характеристик геомагнитного поля и в этом качестве они представляют собой одно из главных направлений исследований в области Главного геомагнитного поля. Напомним, что вековыми вариациями называются изменения компонент его вектора \mathbf{B} , происходящие на интервалах времени от года до 10 тысяч лет и поэтому при их исследовании, кроме инструментальных наблюдений, широко используются данные архео- и палеомагнетизма. Формальным инструментом изучения вековых вариаций служит сферический гармонический анализ, в котором полное описание вектора геомагнитного поля \mathbf{B} во времени и пространстве достигается путем разложения его потенциала V по сферическим функциям с зависящими от времени коэффициентами этого разложения g_n^m и h_n^m :

$$V(r, \theta, \psi) = \frac{R_E}{\mu_0} \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_E}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta) (g_n^m \cos m\psi + h_n^m \sin m\psi). \quad (1)$$

Здесь R_E – радиус Земли, r – расстояние от центра Земли до точки, где вычисляется величина потен-

циала V ; μ_0 – магнитная постоянная; ψ и θ – угловые сферические координаты с полярной осью, направленной вдоль оси вращения Земли. В геомагнетизме приняты специальные соглашения для многочленов Лежандра:

$$P_n^m(\cos \theta) = \begin{cases} \tilde{P}_n^m(\cos \theta), & m = 0 \\ \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}} \tilde{P}_n^m(\cos \theta), & m > 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $\tilde{P}_n^m(\cos \theta)$ – ассоциированные многочлены Лежандра от аргумента $\cos \theta$.

Ряд физических соображений и анализ экспериментально полученных закономерностей изменения коэффициентов этого разложения во времени привел к выдвигению так называемой гипотезы Большого Гауссовского Процесса (БГП) [Constable, Parker, 1988], в рамках которой коэффициенты разложения g_n^m и h_n^m рассматриваются как статистически независимые гауссовы процессы, в частности реализации с достаточно большим шагом во времени подчинены нормальному закону распределения $y(x) = \text{const} \exp(-bx^2/2)$. Модели БГП неоднократно тестировались на основе сравнения их результатов с эмпирическими данными как по данным палеонаправлений [Khokhlov et al., 2006; Khokhlov, Hulot, 2013], так и по мировым базам данных по палеонапряженности

(МБД PINT) [Khokhlov, Shcherbakov, 2015; Щербаков и др., 2015]. Хотя результаты этих тестов в целом оценивались как положительные, некоторые эмпирические данные, особенно содержащиеся в базе данных по палеонапряженности, не укладывались в схему БГП.

Поскольку источником вековых вариаций являются процессы в жидком ядре Земли, в результате которых генерируется главное геомагнитное поле, то наряду с анализом эмпирических соотношений кажется естественным выполнить тест БГП по данным расчетов численных моделей геомагнетизма, выполненных на современных мощных компьютерах. Серия таких расчетов в последние 20 лет были выполнены рядом исследований (подробный обзор можно найти в работе [Christensen, 2011]).

Весьма важной задачей исследования свойств геомагнетизма является анализ статистических характеристик геомагнитного поля, генерируемого в численных моделях геомагнетизма. Особенно интересны случаи геомагнетизма, параметры которых в рамках современных представлений отвечают параметрам магнитного поля Земли; действительно, при этом появляется возможность интерпретаций тех свойств вариаций реального магнитного поля Земли, которые не полностью доступны прямому измерению из-за, например, слишком короткой истории наблюдений или недостаточной точности наблюдений на больших временных масштабах. В данном случае основной интерес представляют статистические характеристики зависящих от времени коэффициентов g_n^m и h_n^m , прежде всего, с целью выяснения условий, при которых выполняется гипотеза БГП, которая используется как удобное предположение при работе с палеомагнитными данными. Однако корректная проверка гипотез и получение статистических оценок требует не одного численного решения, а достаточного для статистики ансамбля таких решений при вариациях начальных условий.

Как известно, переход от статистик по ансамблю к статистикам по времени, вообще говоря, возможен только при условии соблюдения стационарности и эргодичности случайного процесса. На практике стационарность и эргодичность данных часто предполагают без особенных на то оснований, но в дальнейшем это предположение может проявиться неожиданным образом. Цель этой небольшой статьи состоит в демонстрации и объяснении несколько парадоксального результата подобного “слепого” применения статистического анализа к численным моделям: именно появлению форм распределений g_n^m и h_n^m , заметно отличающихся от ожидаемой формы гауссианы. Объяснение полученного эффекта имеет и ряд не связанных прямо с геомагнетизмом применений для обработки данных.

ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ

Последующий анализ основывается на результатах численных расчетов геомагнетизма, представленных в работе [Lhuillier et al., 2013]. При расчетах жидкое внешнее ядро Земли моделировалось проводящей сферической оболочкой с отношением внутреннего и внешнего радиусов $r_i/r_0 = 0.35$, вращающейся с угловой скоростью Ω вокруг оси z . Уравнения магнитной индукции для магнитного поля \mathbf{B} решались в МГД приближении, уравнения Навье–Стокса и переноса для поля скоростей \mathbf{u} и фракции легких элементов решались в приближении Овербека–Буссинеска. На поверхности ядра принимались граничные условия прилипания. Предполагалось, что внутреннее и внешнее ядра имеют одинаковую проводимость. Полагалось также, что генерация поля идет за счет химической конвекции при постоянном потоке легких элементов на границе внешнего и внутреннего ядер и нулевом потоке на границе ядро–мантия.

Следуя данным [Aubert et al., 2008], все расстояния нормировались на толщину оболочки $D = r_0 - r_i$, время – на обратную частоту $1/\Omega$, магнитное поле на $(\rho\mu)^{1/2}(D\Omega)$, где ρ – плотность жидкости, а μ – магнитная проницаемость. Концентрация легких элементов нормировалась на $|S|/\Omega$, где S – отрицательный объемный источник. Свойства модели контролировались четырьмя параметрами: числом Экмана $E = \mu/(\Omega D^2)$, характеризующим относительную величину вязких и кориолисовых сил, гидродинамическим числом Прандтля $Pr = \nu/k$, магнитным числом Прандтля $Pm = \nu/\eta$ и модифицированным числом Рейнольдса $Ra_* = g_0|S|/(\Omega^3 D)$, характеризующим интенсивность конвекции. Величины ν , k и η – коэффициенты кинематической, химической и магнитной диффузий, соответственно, g_0 – ускорение свободного падения на границе ядро–мантия.

Выходными параметрами модели являются магнитное число Рейнольдса $R_m = UD$, где U – усредненная во времени и объему внешнего ядра среднеквадратичная скорость; коэффициент дипольности f_{dip} , который равен отношению усредненной во времени среднеквадратичной величины магнитного поля осевого диполя к полному полю, рассчитываемому вплоть до коэффициентов разложения $n = 12$ на границе ядро–мантия; коэффициент эффективности работы геомагнетизма, f_{ohm} , определяемый как усредненная во времени энергия омической диссипации по отношению к энергии, генерируемой архимедовыми силами [Christensen, Aubert, 2006]. В выбранной системе единиц безразмерная скорость выражается через число Россби $Ro = U/(\Omega D)$, во время как безразмерное магнитное поле рассчитывается через число Ленерта $Le = B/(\Omega D\sqrt{\rho\mu})$.

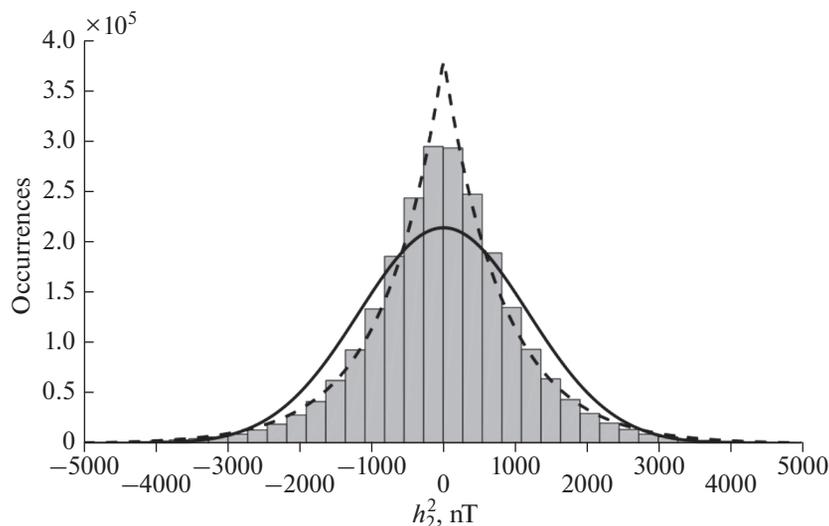


Рис. 1. Гистограмма 2323995 значений коэффициента h_2^2 , соответствующих интервалу времени 33.45 млн лет. Показаны также аппроксимирующие эту гистограмму кривые Лапласа и Гаусса.

Принятая модель идентична модели 2 работы [Luillier et al., 2013] и рассчитывалась при использовании программы PaRoDy-JA [Dormy et al., 1998; Aubert et al., 2008], симулирующей работу геодинамо. Величины контрольных параметров были: $E = 6.5 \times 10^{-3}$, $Ra_* = 5.1 \times 10^{-3}$, $P\tau = 1$ и $Pm = 10$. Численные расчеты велись с разрешением до сферических гармоник 44 порядка, что гарантировало величину отношения между минимумом и максимумом пространственного спектра (усредненного по объему жидкого ядра) > 1000 . Полный объем полученных данных включает в себя 2676712 временных отсчетов, соответствующих интервалу времени 33.45 млн лет.

РЕЗУЛЬТАТ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Поскольку нашей задачей является анализ статистики коэффициентов g_n^m и h_n^m на интервалах постоянной полярности, то сначала из полного массива данных были исключены те, аргументы времени у которых соответствуют экскурсам и инверсиям. По оставшимся 2323995 отсчетам во времени были построены гистограммы распределения для коэффициентов вплоть до двенадцатой гармоники ($m \leq n, n = 1, 12$). Оказалось, что формы этих гистограмм существенно не совпадают с гауссовской формой и, более того, полученные формы существенно лучше (рис. 1) описываются формулой $y(x) = \text{const} \exp(-|bx|)$ отвечающей так называемому “второму закону Лапласа для распределения” (термин французского происхождения, при этом первым законом предполагалось считать гауссиану). Появление негауссовской

формы в контексте исследования динамических систем, очевидно, требует пояснений. Из описания Большого Гауссовского Процесса вытекает, что соответствующие распределения значений g_n^m и h_n^m должны быть гауссовскими и потому появление негауссовских форм в числовом решении конкретного геодинамо не только ставит вопрос о границах подхода БГП, но и подвергает сомнению некоторые оценки, связанные со статистической обработкой магнитных данных.

Поскольку конкретная вычислительная модель только лишь предполагается отвечающей реальному земному магнитному полю (построить сколь-либо достоверный формы аналогичных гистограмм для реального магнитного поля Земли в настоящее время не получится из-за ограниченности данных), то прежде всего следует изучить влияние масштаба изучаемых в модели процессов на указанные эффекты.

ОБСУЖДЕНИЕ: РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В РАЗНЫХ МАСШТАБАХ

Следует помнить, что форма гистограммы зависит от количества данных и способа их бинирования. В случае применимости статистических методов (а они применимы далеко не всегда) форма гистограммы с ростом числа данных стабилизируется. Если вместо ансамбля независимых реализаций в распоряжении имеется единственная реализация некоторого случайного процесса, то для применимости статистики принципиально важно, чтобы статистические свойства данных

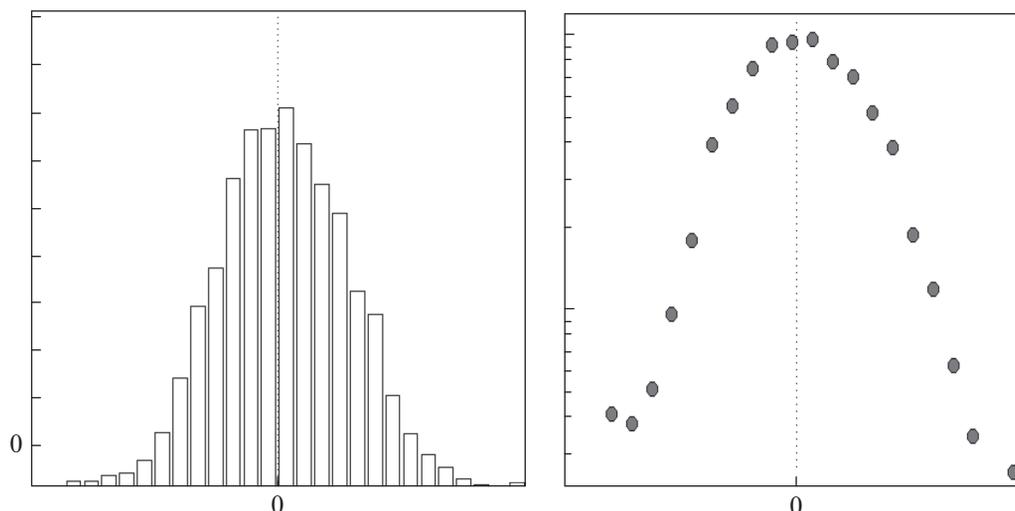


Рис. 2. Слева: гистограмма значений коэффициента h_2^2 для последовательных 8008 отсчетов времени (~ 100 тыс. лет) в линейном масштабе. Справа: та же гистограмма, но в полулогарифмическом масштабе, то есть по оси ординат отложен логарифм числа случаев с заданной величиной коэффициента h_2^2 . Отметим, что на этом и на всех последующих рисунках используется произвольный масштаб по осям координат.

были бы одними и теми же вне зависимости от сегмента времени, выбранного для изучения. На формальном языке это свойство называется стационарностью процесса и на практике, разумеется, выполняется далеко не всегда. С другой стороны, на малых сегментах статистические оценки крайне неточны и указывают лишь на общие свойства распределения. С увеличением размера сегмента времени в случае стационарного процесса соответствующая картина распределения значений уточняется, поэтому, вообще говоря, характеристика стационарного поведения для единственной реализации относится к некоторому размеру временного сегмента. Аналогично, при исследовании ансамбля реализаций на фиксированном сегменте для статистических оценок понадобится достаточно большое число этих реализаций.

На рис. 2 слева показана гистограмма для коэффициента h_2^2 в линейной шкале для относительно небольшого сегмента решения, содержащего 8008 последовательных отсчетов времени (~ 100 тыс. лет). Эта форма в полулогарифмической шкале удовлетворительно описывается выпуклой вверх кривой, близкой к параболе (рис. 2, справа). Следовательно, пусть и с определенной осторожностью, можно говорить о гауссовском характере небольших выборок (поскольку логарифм гауссовского распределения есть парабола $\text{const} - x^2$). На самом деле, даже и при небольшой выборке такие гистограммы демонстрируют некоторые отклонения от гауссовского распределения. Действительно, на крыльях гистограммы,

приведенной на рис. 2 справа, явно прослеживаются слишком большие отклонения от параболической формы свидетельствующие о более медленном, нежели $\exp(-bx^2/2)$, убывании функции распределения. Соответственно этому, как показывают численные вычисления, с увеличением интервала времени форма гистограммы имеет тенденцию к стабилизации вокруг качественно иной формы (рис. 3 и рис. 4), близкой к лапласову распределению $b/2 \exp(-|bx|)$ (в полулогарифмическом масштабе на рис. 3 справа эта форма представлена прямыми линиями), что и доказывает влияние объема данных на итоговый ответ. Другими словами, данные на относительно коротких интервалах и статистики на больших подчинены разным статистическим законам.

Характерный признак этого явления — зависимость абсолютной величины среднеквадратичного отклонения случайной величины от положения окна осреднения — достаточно легко отследить непосредственно, путем сравнения с заведомо в данном масштабе стационарным процессом. Такой визуальный анализ стационарности облегчается рассмотрением графиков не самих величин, а абсолютных величин их первых разностей (рис. 5), как это проиллюстрировано на рис. 5 слева на примере коэффициента h_2^2 . Для сравнения на рис. 5 справа приведен подобный график, построенный по симулированному заведомо стационарному процессу. Как видно из сопоставления этих графиков, нестационарность поведения во времени коэффициента h_2^2 выражается в наличии относительно коротких, порядка сотен отсчетов (или

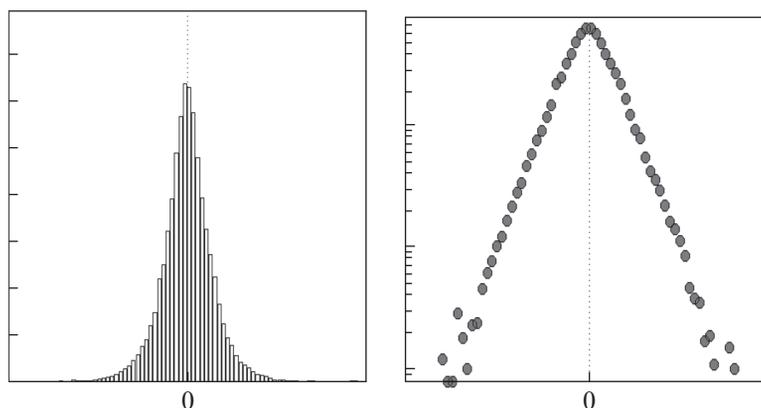


Рис. 3. Слева: гистограмма значений коэффициента h_2^2 для последовательных 72255 отсчетов времени (~900 тыс. лет). Справа: та же гистограмма, но в полулогарифмическом масштабе.

тысяч лет), но слишком больших провалов и выбросов абсолютных величин первых разностей этого коэффициента в сравнении с тем, что мы видим на рис. 5 слева.

ОБСУЖДЕНИЕ: ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ И СМЕСИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Разница в формах гистограмм на коротких и длинных интервалах времени может указывать на хорошо известное для динамических систем явление *перемежаемости* [Фриш, 1998], однако формальные тесты на перемежаемость по одной реализации не столь очевидны, поскольку речь должна бы идти о проверке скейлинговых свойств статистических моментов процесса, но для такой проверки также желательно иметь ансамбль а не единственную реализацию.

С другой стороны, стабилизация гистограммы к отличной от гауссианы форме с ростом рассматриваемого интервала времени (рис. 3 и рис. 4) позволяет говорить о том, что модель рандомизации (используется также термин “смесь распределений”, (см. [Феллер, 1984]) случайных гауссовских величин должна достаточно неплохо описывать статистические свойства коэффициентов g_n^m и h_n^m во времени. Напомним что рандомизацией посредством плотностей распределения $u(x)$ семейства двумерных плотностей распределения $w(x, y)$ называется функция

$$w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, t)u(t)dt. \quad (3)$$

Несложно проверить, что эта функция также является плотностью распределения.

Пусть теперь случайная величина α имеет плотность распределения $v(x)$, тогда при фиксированном $c > 0$ случайная величина α/c имеет

плотность распределения $v(xc)/c$. Следовательно, если рассматривать неотрицательную случайную величину β с плотностью распределения $u(x)$, то плотность распределения частного α/β будет выражаться формулой

$$w(x) = \int_0^{+\infty} v(xt)tu(t)dt, \quad (4)$$

то есть случайные усиления или ослабления случайной величины α имеют плотностью смесь распределений. Разумеется, рассматриваемая случайная величина β может быть и дискретной, соответствующая формула плотности смеси тогда записывается в виде суммы, а не интеграла. Кро-

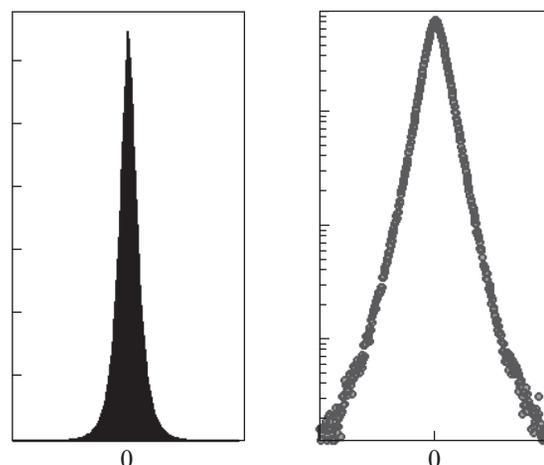


Рис. 4. Гистограмма 2676712 значений в мТ коэффициента h_2^2 . Слева: масштаб линейный по обоим осям, справа график в полулогарифмическом масштабе, то есть ось абсцисс линейна, а ось ординат логарифмическая.

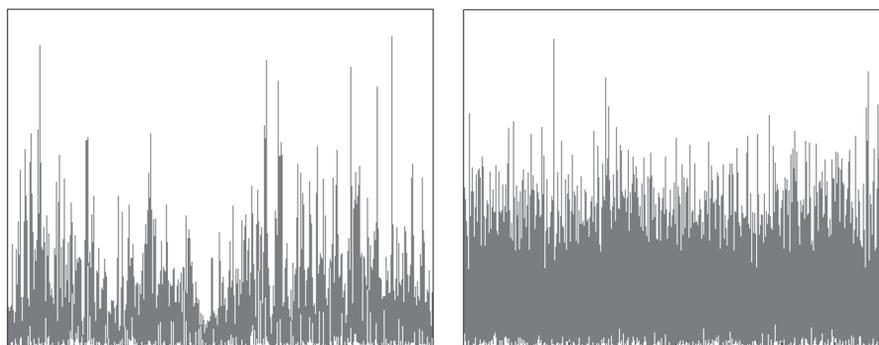


Рис. 5. Слева: график абсолютных значений первых разностей коэффициента h_2^2 последовательных 8008 отсчетов времени (~100 тыс. лет). Справа: график абсолютных значений первых разностей стационарного гауссовского процесса со сходными корреляциями во времени.

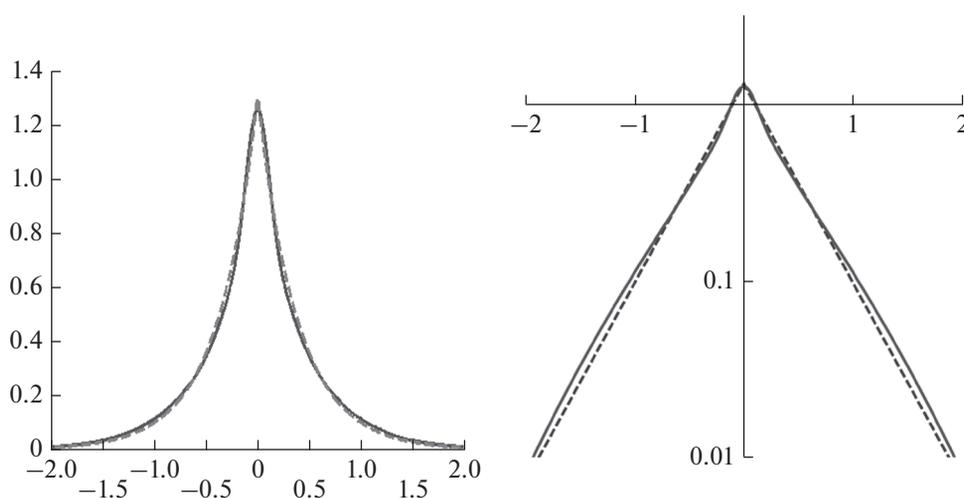


Рис. 6. Пунктирная линия отвечает графику плотности $1.3\exp(-2.6|x|)$ (т.е. графику плотности второго закона Лапласа), сплошная линия отвечает графику плотности смеси девяти гауссовских распределений с нулевым средним и стандартными отклонениями $\sigma = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$. Графики слева даны в линейной шкале, справа – в полулогарифмической.

ме того, удобно рассуждать не в терминах случайной величины β , а обратной $1/\beta$ с тем, чтобы отождествить соответствующие значения с коэффициентом усиления–ослабления. Ограничимся для простоты ситуацией, когда имеет место лишь ослабление и рассмотрим пример смеси из девяти равновероятных центрированных гауссовских случайных величин со стандартными отклонениями $\sigma = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$, то есть имеем девять равновероятных ослаблений стандартной гауссовской величины. Формула для плотности этой смеси такова:

$$w(x) = \sum_{k=0}^9 \frac{10}{k\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{10x}{k}\right)^2\right]. \quad (5)$$

Сравнение соответствующего графика с графиком плотности второго закона Лапласа в обычной и полулогарифмической шкалах показано на

рис. 6, который демонстрирует, что плотность смеси малоотличима от плотности второго закона Лапласа.

Непрерывная версия этого примера дает смесь гауссовских плотностей со стандартными отклонениями, равномерно распределенными на отрезке $[0, 1]$, соответствующая плотность может быть вычислена аналитически и выражается через неполную гамма-функцию:

$$w(x) = \frac{1}{8\pi} \Gamma\left(0, \frac{x^2}{2}\right). \quad (6)$$

Соответствующий график в линейном и полулогарифмическом масштабе показан на рис. 7.

Разумеется, пример с “равномерной ослабляющей модуляцией” выбран здесь лишь для иллюстрации и количественный анализ необходим для понимания того, какое именно распределение

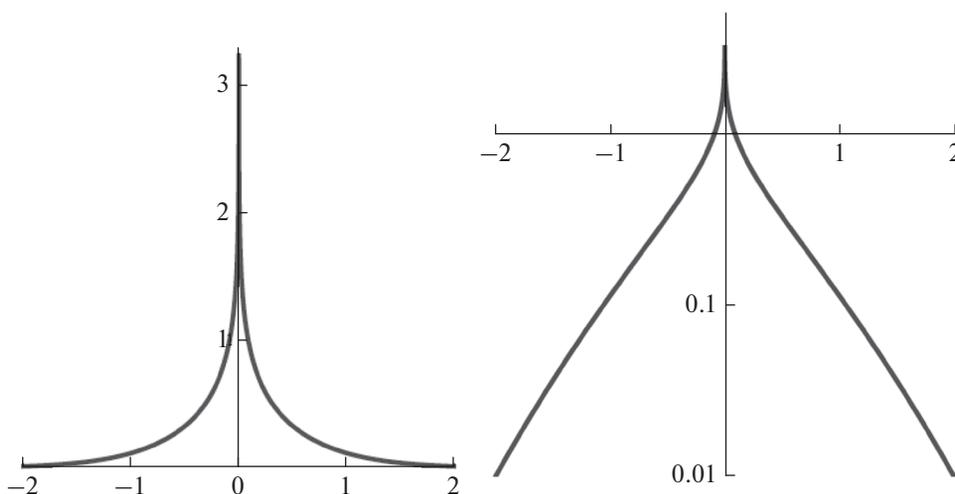


Рис. 7. Смесь гауссовых величин, стандартные отклонения которых равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Соответствующая плотность имеет сингулярность в нуле. График слева дан в линейной шкале, справа – в полулогарифмической.

усиления и ослабления больше подходит для вычислительных решений конкретной модели геодезического динамо. Как отмечалось выше, такой статистический анализ может быть корректно проведен лишь на ансамблях решений, соответствующие данные авторам статьи пока недоступны. Ограничимся здесь поэтому упоминанием того, что смесь равновероятных гауссиан не является единственным примером, приводящим к формам типа второго закона Лапласа: возможный запас “модулирующих” гауссиан случайных величин для подобных примеров весьма и весьма широк. Поэтому вне довольно кропотливого исследования ансамбля решений получить сколь-либо надежный ответ о характере модуляции не представляется возможным.

ВЫВОДЫ

Вообще говоря, появление негауссовых распределений в турбулентных динамических системах было отмечено достаточно давно при анализе свойств уравнений гидродинамики, уточненный анализ гидродинамических экспериментальных данных также показывал, что соответствующие распределения похожи на распределение Лапласа. Идея объяснения статистических свойств таких данных в терминах смесей гауссовых законов появляется в статье [Barndorff-Nielsen, 1979]. Вычислительные модели геодезического динамо рассматриваются также и для турбулентных режимов и, таким образом, наблюдаемые нами эффекты в численных решениях геодезического динамо находят вполне в соответствии со свойствами данных, ранее полученными в физических экспериментах с турбулентными системами, следовательно, речь не идет о чисто вычислительных артефактах.

Исследования эволюции во времени коэффициентов $g_n^m(t)$ и $h_n^m(t)$ численных решений геодезического динамо из статьи [Lhuillier et al., 2014] показывают, что вековые вариации на малых отрезках времени и на больших с точки зрения распределения возможных значений устроены по-разному. Именно, на коротких сегментах можно с определенной осторожностью говорить о справедливости модели Большого Гауссовского Процесса, то есть вековые вариации можно считать стационарным гауссовским процессом (хотя строго говоря, надо убедиться в том, что совместное многомерное распределение также гауссово). Достаточно большой интервал времен, однако, разбивается на несколько сегментов таких, что параметры соответствующих стационарных гауссовских процессов на них отличаются. Следовательно, статистика глобального поведения процесса вековых вариаций будет отличаться от локальных статистик, что и выражается, например, в форме гистограмм для g_n^m и h_n^m . Уточненное описание глобального поведения вековых вариаций можно дать в терминах смеси нескольких гауссовских стационарных процессов, что на неформальном языке можно охарактеризовать как переключение разных режимов поведения. Замеченное свойство отнюдь не является новым для динамических систем, поскольку сопутствует достаточно широко распространенному явлению перемежаемости в наблюдаемых решениях [Фриш, 1998].

Изучаемые конкретные вычислительные решения $g_n^m(t)$ и $h_n^m(t)$ геодезического динамо получены в условиях конкретных параметров и потому тип наблюдаемой перемежаемости (и даже возможное ее отсутствие) также зависит от этих параметров.

Существует ли, и если да, то какая именно пере-
межаемость в реальном земном магнетизме — это
пока что вопрос открытый. К его решению можно
подступаться несколькими путями: либо накап-
ливая представительные и точные данные по про-
межуткам стабильной полярности в геологиче-
ской истории Земли, либо изучая разные типы
параметров для вычислительных моделей геоди-
намо и изучая вопрос о соответствии этих типов
параметров реальным условиям в жидком ядре
Земли. Пока что второй путь представляется бо-
лее реалистичным относительно имеющихся воз-
можностей.

Работа выполнена при поддержке грантов
РФФИ № 15-05-01842 и **Министерства образова-
ния (договор № 14.Z50.31.0017)**. Авторы благодар-
ны М.Ю. Решетняку и Д.Д. Соколову за кон-
структивные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее прило-
жения. Т. 1. М.: Мир. 1984. 529 с.
- Фриш У.* Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова.
М.: Факториал. 1998. 348 с.
- Щербаков В.П., Хохлов А.В., Сычева Н.К.* О функции
распределения величины геомагнитного поля по мо-
дели Большого Гауссова Процесса и эмпирическим
данным // Физика Земли. 2015. № 5. С. 179–192. doi
10.7868/S0002333715050117
- Aubert J., Aurnou J.M., Wicht J.* The magnetic structure of
convection-driven numerical dynamos // Geophys. J. Int.
2008. V. 172. № 3. P. 945–956. doi 10.1111/j.1365-246X.
2007.03693.x
- Barndorff-Nielsen O.* Models of non-Gaussian variation
with application to turbulence // Pros. R. Soc. Lond. 1979.
A368. P. 501–520.
- Constable C.G., Parker R.L.* Statistics of the Geomagnetic
Secular Variation for the Past 5 m.y. // J. Geophys. Res.
1988. V. 93. № B10. P. 11569–11581.
- Christensen U.R., Aubert J.* Scaling properties of convec-
tion-driven dynamos in rotating spherical shells and appli-
cation to planetary magnetic fields // Geophys. J. Int. 2006.
V. 166. № 1. P. 97–114. doi 10.1111/j.1365-246X.2006.
03009.x
- Christensen U.R.* Geodynamo models: Tools for under-
standing properties of Earth's magnetic field // Phys. Earth
Planet. Inter. 2011. V. 187. P. 157–169.
- Khokhlov A., Hulot G., Bouligand C.* Testing statistical pa-
laeomagnetic field models against directional data affected
by measurement errors // Geophys. J. Int. 2006. V. 167.
№ 2. P. 635–648. doi 10.1111/j.1365-246X.2006.03133.x
- Khokhlov A., Hulot G.* Probability uniformization and appli-
cation to statistical palaeomagnetic field models and direc-
tional data // Geophys. J. Int. 2013. V. 193. № 1. P. 110–
121. doi 10.1093/gji/ggs118
- Khokhlov A., Shcherbakov V.* Palaeointensity and Brunhes
palaeomagnetic field models // Geophys. J. Int. 2015.
V. 202. № 2. P. 1419–1428. doi 10.1093/gji/ggv236
- Lhuillier F., Hulot G., Gallet Y.* Statistical properties of rever-
sals and chrons in numerical dynamos and implications for
the geodynamo // Phys. Earth Planet. Inter. 2013. V. 220.
P. 19–36. doi 10.1016/j.pepi.2013.04.005.1
- Lhuillier F., Hulot G., Gallet Y.* Statistical properties of rever-
sals and chrons in numerical dynamos and implications for
the geodynamo // Phys. Earth Planet. Inter. 2013. V. 220.
P. 19–36.