

УДК 550.384.3, 519.246.3, 519.258

## ВЕКОВЫЕ ГЕОМАГНИТНЫЕ ВАРИАЦИИ: СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПАЛЕОМАГНИТНЫХ ДАННЫХ

© 2014 г. А.В. Хохлов

*Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН,  
г. Москва, Россия*

Для понимания характера изменчивости магнитного поля Земли требуется математически строгий метод проверки статистических гипотез на реальных палеомагнитных данных. Как известно, палеомагнитные данные по лавам весьма фрагментарны во времени и пространстве и содержат лишь частичную и неточную информацию о векторах древнего магнитного поля. Теоретические модельные описания вариаций поля оперируют глобальными параметрами, относящимися ко всей Земле в целом, такими, например, как коэффициенты разложения магнитного потенциала по сферическим гармоникам (гауссовы коэффициенты). Эти глобальные описания позволяют указать вектор поля в любой точке земной поверхности. Рассматривая небольшую совокупность данных по направлениям, когда, например, все данные относятся лишь к одному региону, довольно трудно сколько-либо точно вычислить потенциал соответствующего поля, что делает затруднительным прямое сопоставление экспериментальных гауссовых коэффициентов с теоретическими, т.е. со статистической гипотезой о вековых вариациях. Более уместным представляется вопрос о совместности измеренных направлений (относящихся, вообще говоря, к разным разрезам) с предписанными гипотезой. Здесь речь идет о статистической совместности, и реализация этой проверки не проста, поскольку направления не являются числовыми величинами, в связи с чем привычные формулы статистики к ним зачастую неприменимы.

Статья содержит необходимое теоретическое описание метода тестирования совместности модели вариаций и палеомагнитных данных, а также некоторые конкретные результаты приложения этого метода к палеомагнитным данным по лавам текущей эпохи стабильной полярности Брюнес (*Brunhes*).

**Ключевые слова:** палеомагнетизм, вековые вариации, гауссовские случайные процессы, распределения точек на сфере.

### Введение

В статье рассматривается задача сравнения модельных описаний вековых вариаций и реально существующих палеомагнитных данных. На сегодняшний день нет единой теории, которая объясняла бы количественно вековые вариации направлений магнитного поля Земли в любую эпоху; вернее имеется несколько таких статистических описаний. В связи с этим естественным образом встает вопрос: какое именно описание следует считать правильным. Коллекции палеомагнитных данных усилиями специалистов всего мира увеличиваются, а доверие к статистическим оценкам напрямую зависит от количества данных для анализа. Поэтому вопрос о корректной статистической обработке палеомагнитных данных представляется весьма актуальным.

Итак, пусть задано некоторое модельное описание вековых вариаций магнитного поля Земли в статистических терминах на языке так называемого Большого Гауссовского Процесса (БГП) [*Constable, Parker, 1988*]. В этих моделях коэффициенты разложения магнитного поля по базису сферических гармоник ведут себя во времени как стационарные гауссовские процессы, и задание конкретной модели сводится к заданию

набора математических ожиданий и корреляционных функций для коэффициентов. Разумность статистического описания в терминах БГП проверялась, например, для вычислительных геодинамо [Bouligand et al., 2005]. В статье [Хохлов, 2012] автором было показано, как работает модель БГП в смысле ее компьютерной реализации, и в частности продемонстрировано, что в любой географической точке можно синтезировать сколь угодно длинные ряды данных, которые по построению согласуются с исходным набором математических ожиданий и корреляционных функций для БГП. Если при этом из синтезированных векторных данных оставить только одни направления, то можно имитировать реальные палеомагнитные данные, которые возникают в процессе изучения магнитных свойств конкретных геологических образцов. Однако, хотя, на поверхностный взгляд, синтетические данные достаточно похожи на реальные, необходима количественная оценка их сходства и различия.

Очевидная сложность состоит в том, что при сравнении статистических свойств направлений поля надо использовать методы, относящиеся не к статистике числовых величин, а к статистике направлений в пространстве, т.е. к статистике точек на единичной сфере. Направления, в отличие от чисел, не допускают арифметических операций, поэтому прямое использование обычных формул статистики затруднительно. Хотя статистика распределений на сфере давно представляет интерес для многих задач естествознания (см., например, [Bingham, 1983; Fisher, Lewis, Embleton, 1987]), развиваемые до последнего времени подходы описывали лишь удобные для аналитических вычислений распределения точек на сфере. Эти удобства обеспечивались предположениями о наличии в распределении разнообразных симметрий, для ожидания которых в вековых вариациях, вообще говоря, нет физических оснований.

Отвечающее БГП распределение направлений магнитного поля в данной географической точке аналитически устроено довольно громоздко и ранее рассматривалось в литературе лишь с использованием приближений и дополнительных упрощений [Love, Constable, 2003]. Ниже будет приведена общая точная формула для распределения направлений, возникающих из модели БГП, и изложена вся сопутствующая методика сравнения. На самом деле в этой методике трудоемка лишь вычислительная обработка, и потому она реализована в виде некоторой компьютерной программы, доступной для свободного скачивания в Интернете; в то же время идея этой методики совершенно прозрачна и вполне в духе классической статистики.

Другая особенность задачи сравнения состоит в том, что реальные данные относятся к разрезам в различных географических точках. Модель БГП в таком случае предсказывает, вообще говоря, совершенно разные распределения векторов магнитного поля в этих точках (соответственно, разные распределения направлений). Таким образом, в едином статистическом тесте на совместность надо научиться использовать целое семейство разных распределений.

Существует еще одно усложняющее задачу обстоятельство: качественные палеомагнитные данные содержат для каждого направления параметр точности, который обычно выражен либо в безразмерном параметре концентрации  $K$ , либо в угловом параметре  $\alpha_{95}$  для 95% возможных отклонений от истинного направления (см., например, [Tauxe, 2009]). Очевидно, что характеристику точности следует учитывать при сравнении данных с моделью. В случае векторных данных и, скажем, независимой гауссовской ошибки (с одинаковыми параметрами всех данных) метод учета ошибок достаточно хорошо известен, но для данных направлений и ошибки, скажем, в терминах параметра  $\alpha_{95}$  (да еще и изменяющегося от направления к направлению) соответствующая методика ранее разработана не была.

В статье рассматриваются следующие темы, отражающие поставленные выше вопросы:

- предписываемые моделью Констабль–Паркера распределения направлений в разных точках земной поверхности;
- изменения распределения направлений при учете ошибок, выраженных в терминах  $\alpha_{95}$ ;
- преобразование статистических распределений к равномерному распределению (метод выравнивания);
- анализ реальных данных методом выравнивания с учетом ошибок на примере базы Q94 палеонаправлений эпохи Брюнес.

Из набора основных опубликованных ранее моделей для вековых палеомагнитных вариаций эпохи Брюнес, как оказалось, лишь одна совместима в глобальном масштабе с реальными данными. Если принять во внимание, что в тесте использовалось около тысячи направлений, то указанный метод выглядит достаточно точным инструментом различения глобальных статистических свойств магнитных вариаций.

Названные темы на протяжении последних лет исследовались автором вместе с сотрудниками Отдела геомагнетизма Парижского института физики Земли. Частичные этапы понимания общей картины и промежуточные экспериментальные результаты опубликованы в [Khokhlov, Hulot, Catlut, 2001; Elmaleh et al., 2004; Khokhlov, Hulot, Bouligand, 2006]. В настоящей статье последовательно изложена общая схема метода и приведены полученные в [Khokhlov, Hulot, 2013] экспериментальные результаты с реальными палеомагнитными данными эпохи Брюнес.

Вычислительная процедура, недавно оформленная в программный пакет, предлагается в рамках обычной для открытых источников лицензии GNU для свободного использования [<http://geomag.ipgp.fr/download/PSVT.tgz>].

### Распределения направлений магнитного поля, предписываемые моделью БГП

Широкоизвестная явная формула, выражающая вектор  $\mathbf{B} = \{B^1, B^2, B^3\}$  магнитного поля в заданной точке земной поверхности через магнитный потенциал (см., например, раздел “Описание Главного Магнитного поля Земли в терминах БГП” в [Хохлов, 2012]) показывает, что гауссовы коэффициенты входят в координаты  $B^i$  линейно, и, следовательно, статистика этого вектора в точке определяется через совместные статистики коэффициентов БГП. В частности, поскольку коэффициенты БГП распределены по многомерному гауссовскому закону, то поведение во времени вектора  $\mathbf{B}$  – также гауссовский процесс, конкретные параметры которого несложно рассчитать по корреляционной матрице исходного БГП и соответствующим математическим ожиданиям коэффициентов. В настоящей статье нас интересуют палеомагнитные данные по лавам с дополнительным свойством некоррелированности, обеспечиваемым, как правило, разделенностью лавовых потоков во времени. Мы не станем еще раз явно приводить формулы для корреляций трехмерного случайного процесса, ограничившись ссылкой на уже цитируемую статью [Хохлов, 2012]. В этой работе в разделе “Большой Гауссовский Процесс и поведение магнитного поля в выбранной географической точке” приведен вывод значений параметров (трехмерного) гауссовского закона распределения  $E(\mathbf{B}) = \mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$  и  $\text{Cov}(\mathbf{B}, \mathbf{B}) = [\text{cov}(B^i, B^j)]$ . Эти параметры определяют функцию плотности  $\mathbf{g}$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $(x_1, x_2, x_3)$  – пусть  $\Lambda = [\Lambda^{ij}]$  обозначает также симметричную обратную матрицу для  $\text{Cov}(\mathbf{B}, \mathbf{B})$ , и тогда

$$\mathbf{g}(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{\det \Lambda}{(2\pi)^3}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \Lambda^{ij} (x_i - m_i)(x_j - m_j) \right] \quad (1)$$

или

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\det \Lambda}{(2\pi)^3}} \exp \left[ -\frac{1}{2} ((\mathbf{x} - \mathbf{m}), \mathbf{x} - \mathbf{m}) \right]. \quad (2)$$

Распределение направлений  $\mathbf{u} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$  случайного вектора  $\mathbf{B}$  кодируется функцией плотности  $\mathbf{s}(\mathbf{u})$ , заданной на двумерной сфере  $\Sigma$  в  $\mathbb{R}^3$ . Связь двух указанных функций плотности в сферической системе координат  $(\mathbf{u}, \rho)$  очевидно такова:

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}) = \int_0^\infty \mathbf{g}(\rho \mathbf{u}) d\rho. \quad (3)$$

В основополагающей статье [Bingham, 1964] это распределение названо “угловым гауссовским”, но вид функции плотности там был приведен лишь для простого симметричного частного случая. Для проверки соответствия между реальными данными и теорией необходима именно общая формула, вывод которой приведен ниже.

Используем обозначение  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_\Lambda$  для нового скалярного произведения  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_\Lambda = (\Lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^3 \Lambda^{ij} x_i y_j$ ; соответствующая  $\Lambda$ -норма  $|\mathbf{x}|_\Lambda$  определяется как  $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})_\Lambda}$ .

В сферических координатах  $(\mathbf{u}, \rho)$  пространства  $\mathbb{R}^3$  имеем выражение для гауссовской плотности:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \rho) = \sqrt{\frac{\det \Lambda}{(2\pi)^3}} \rho^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\rho \mathbf{u} - \mathbf{m}|_\Lambda^2 \right\}. \quad (4)$$

После интегрирования этой плотности по переменной  $\rho$  получим

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}) = e^{-\frac{1}{2} m^2} \sqrt{\frac{\det \Lambda}{4\pi |\mathbf{u}|_\Lambda^3}} \left[ z \sqrt{\frac{2}{\pi}} + e^{\frac{1}{2} z^2} (1 + z^2) \left[ 1 + \operatorname{Erf} \left( \frac{z}{\sqrt{2}} \right) \right] \right], \quad (5)$$

где

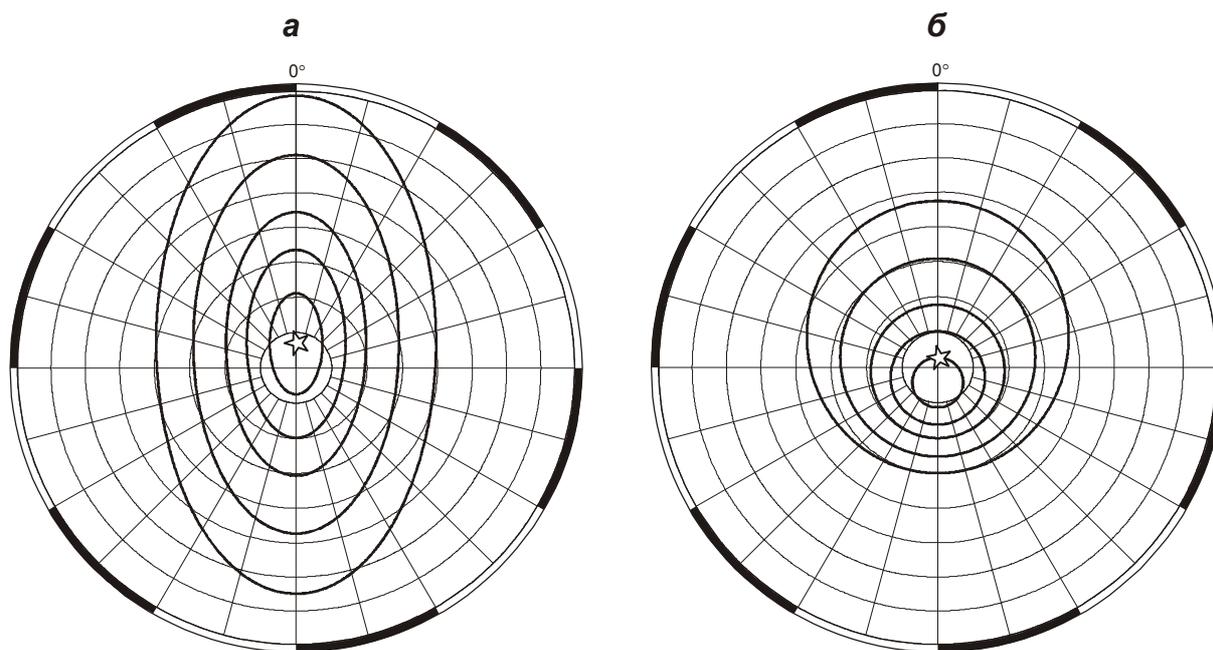
$$z = \frac{(\mathbf{m}, \mathbf{u})_\Lambda}{|\mathbf{u}|_\Lambda}, \quad m = |\mathbf{m}|_\Lambda \quad (6)$$

обозначают соответственно  $\Lambda$ -проекцию вектора  $\mathbf{m}$  на направление  $\mathbf{u}$  и  $\Lambda$ -норму вектора  $\mathbf{m}$ . Поскольку матрица  $\Lambda$  положительно определена, то  $-m \leq z \leq m$ .

Таким образом, формула (5) предсказывает распределение направлений магнитного поля в точке земной поверхности в случае, если всё поле точно описывается моделью БГП. Это дает идею тестирования соответствия данных и модели – достаточно в разных географических точках проверять статистическое соответствие палеомагнитных данных теоретической функции плотности их распределения, т.е. плотности, рассчитанной по коэффициентам БГП.

Линии уровня функции плотности на сфере ограничивают области, вероятность попадания в которые можно вычислить явно. На рис. 1, а показаны пять областей, вероятности попадания направлений в которые, рассчитанные по модели  $QC^1$  для географической точки на экваторе (0 °с.ш., 3 °з.д.), составляют 10, 30, 50, 70 и 90%. На рис. 1, б показаны аналогичные области для той же модели, но уже для географической

<sup>1</sup> Описание модели см. в [Quidelleur, Courtillot, 1996] или [Хохлов, 2012].



**Рис. 1.** Форма изолиний плотности распределения, отвечающих областям вероятности 10%, 30%, 50%, 70% и 90% в модели QC для двух географических точек, расположенных на разной широте: *а* – 0 °с.ш., 3 °з.д.; *б* – 45 °с.ш., 3 °з.д. Использованы проекции Ламберта, центрированные на соответствующие чисто дипольные направления; звездочки – направления среднего поля по модели QC; грид сетки –  $5 \times 15^\circ$ . Ориентация задана тем, что часть дуги большого круга, определенного направлением чистого диполя и направлением на север, отвечает вертикальному отрезку

точки с широтой  $45^\circ$  (45 °с.ш., 3 °з.д.). Можно видеть, что форма областей зависит от широты. При этом проекцией сферы на плоскость является азимутальная равноплощадная проекция Ламберта, центрированная на направление диполя, соответствующего географической широте (так как модель QC имеет нетривиальный квадрупольный член, то средний вектор поля не попадает в центр проекции).

Следует отметить, что (поточечное) *VGP*-преобразование рассматриваемых областей выглядит весьма несимметрично и вдобавок значительно зависит от географической широты. Следовательно, статистический анализ параметров *VGP*-рассеяния палеомагнитных данных, относящихся к разным разрезам, выявит только самые грубые черты БГП. Например, если все параметры дисперсий одной модели БГП существенно превосходят соответствующие параметры другой, то есть шанс увидеть отличие соответствующих модельных данных на уровне характеристик *VGP*-распределений (см., например, [Kono, Tanaka, 1995]). Однако в любом случае такой анализ будет весьма приближенным; цель же данной статьи – предложить более тонкие методы различения.

На практике ожидаемое распределение данных должно еще учитывать их точность, т.е. отвечающее модели БГП угловое гауссовское распределение в реальных условиях окажется дополнительно искаженным за счет ошибок измерения. Ниже объясняется, как именно ошибки измерения направлений воздействуют на функцию плотности  $\mathfrak{s}(\mathbf{u})$ .

### Статистические свойства ошибок измерения направлений

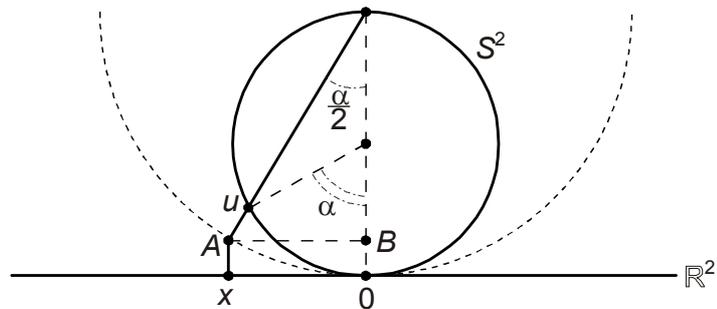
Измерения всегда производятся с некоторой точностью, и для случая определения палеомагнитных направлений точность измерений, как правило, не слишком высока. Направление для одного образца измеряется посредством учета нескольких векторов

остаточных намагниченностей. При этом отобранные в одном лавовом потоке образцы за счет случайных ошибок измерения дают несколько различные направления, которые, как правило, кодируются векторами единичной длины. Направление суммы этих единичных векторов принимается за итоговое палеомагнитное направление, запечатленное в данном потоке лавы. Аккуратное исследование [Fisher 1953] такой конструкции “осреднения по образцам” приводит к аналогу Центральной Предельной Теоремы теории вероятностей для распределений точек на сфере: для большого класса распределений на сфере закон распределения осреднения (выборки) хорошо приближается распределением Фишера. В приложении к образцам из одного лавового потока это означает, что после указанного осреднения по образцам, хранящим искаженное ошибками измерения направление древнего магнитного поля, возникает случайное направление, которое можно считать распределенным по Фишеру (фишеровским распределением).

Соответствующую функцию плотности фишеровского распределения  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  можно представить как перенормированный прообраз  $L^{-1}(\mathbf{g})$  на сфере от симметричной двумерной гауссовой плотности  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ; при этом проекция  $L$  сферы на плоскость (рис. 2) – азимутальная равноплощадная проекция Ламберта  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Рис. 2.** Азимутальная проекция Ламберта  $L$  единичной сферы  $S^2$  на соприкасающуюся плоскость  $\mathbb{R}^2$ .

Очевидно, что  $|\mathbf{x}| = |AB| = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$



Действительно, пусть  $K = \sigma^{-2}$  обозначает параметр концентрации фишеровского распределения, а  $C_1, C_2, C_3$  – константы нормализации. Тогда

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = C_1 e^{K \cos \alpha} = C_1 e^{K \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = C_2 e^{-2K \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = C_2 \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{|\mathbf{x}|}{\sigma} \right)^2 \right] = C_3 \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Такая интерпретация фишеровского распределения заодно проясняет интуитивно очевидный факт, что при достаточно больших значениях параметра концентрации распределение Фишера весьма близко к угловому гауссовскому распределению на сфере, возникающему из трехмерного гауссовского распределения с характеристиками  $\mathbf{m}$  и  $\Lambda^{ij} = \sigma^{-2} \delta_j^i$  при  $\sigma = |\mathbf{m}| K^{-\frac{1}{2}}$ .

### Распределение направлений с учетом ошибки измерения

Вообще говоря, необходимо уточнить конкретный вариант ошибки измерений в рамках развиваемого подхода. Так, мы не будем принимать во внимание систематические ошибки, которые в векторном случае соответствуют вкладу некоторого неслучайного вектора во все измерения, и ограничимся только случайными ошибками указанного фишеровского типа. В частности, распределение ошибки на сфере всегда считается изотропным по направлениям. Для иллюстрации идеи рассмотрим сначала вспомогательный векторный случай.

### Учет изотропной случайной ошибки измерения в векторном случае

Свободное от ошибок измерение на языке статистических распределений характеризуется функцией Дирака: если в результате измерений всегда получается один и тот же вектор  $\mathbf{x}_0$ , то функция Дирака  $\delta_{\langle \mathbf{x}_0 \rangle}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  задает плотность вероятности соответствующих значений измерения. Если добавить к этому точному измерению двумерную изотропную гауссовскую ошибку с дисперсией  $\sigma^2$ , то результирующее распределение для измеренной величины изменится – функция Дирака заменяется сдвинутой в точку  $\mathbf{x}_0$  гауссовской плотностью  $\mathfrak{g}_{\langle \mathbf{x}_0 \rangle}(\mathbf{x}) = \mathfrak{g}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ .

Такая замена “острой” плотности распределения  $\delta_{\langle \mathbf{x}_0 \rangle}(\mathbf{x})$  на “размазанную”  $\mathfrak{g}_{\langle \mathbf{x}_0 \rangle}(\mathbf{x})$  может быть обобщена на произвольную (необязательно гауссовскую) плотность ошибки измерений  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ . Действительно, любая плотность может быть представлена как суперпозиция своих “острых” компонент, т.е. функций Дирака  $\delta$ :

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{p}(\mathbf{y}) \delta_{\langle \mathbf{y} \rangle}(\mathbf{x}) d\mathbf{y} = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{p}(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Соответствующая плотность измерений с  $\sigma$ -ошибками  $\mathbf{p}_\sigma(\mathbf{x})$  будет иметь вид:

$$\mathbf{p}_\sigma(\mathbf{x}) = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{p}(\mathbf{y}) \mathfrak{g}_{\langle \mathbf{y} \rangle}(\mathbf{x}) d\mathbf{y} = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{p}(\mathbf{y}) \mathfrak{g}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (7)$$

Разумеется, указанная интегральная операция является ничем иным, как сверткой.

### Учет изотропной случайной ошибки измерения для направлений

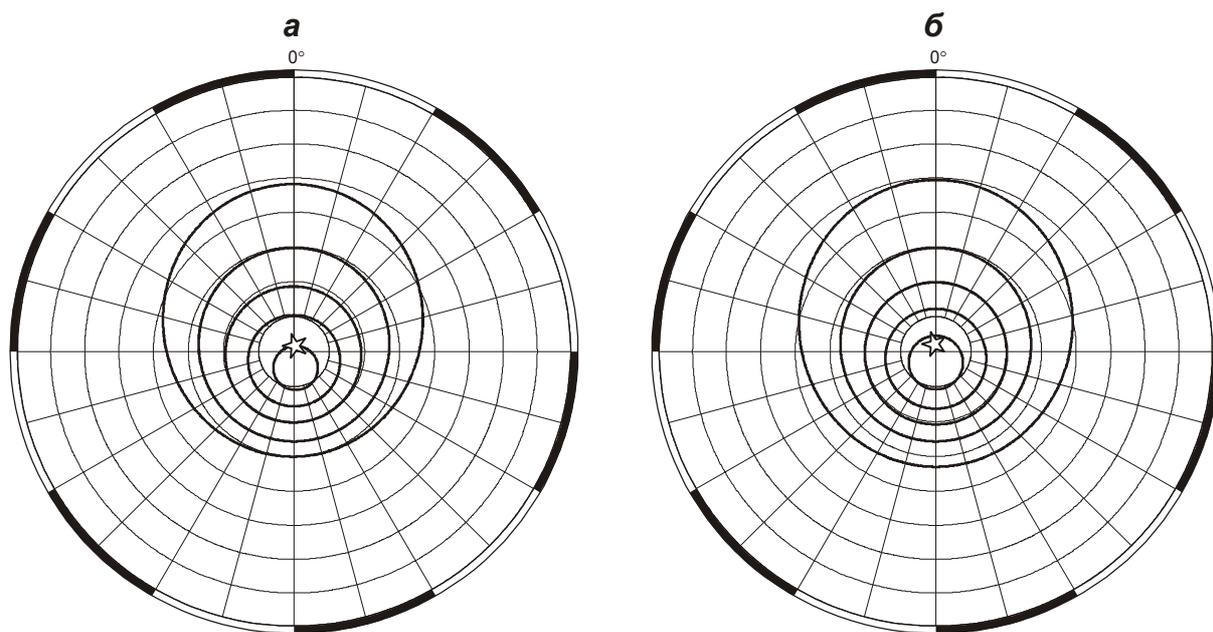
При рассмотрении на сфере экспериментальных данных ошибка измерений достаточно традиционно (см., например, [Fisher, Lewis, Embleton, 1987]) предполагается распределенной по Фишеру (причина этого для палеомагнитных данных частично пояснена выше). В частности, ошибка измерения палеомагнитного направления характеризуется телесным углом, отвечающим 95%-ному квантилю фишеровского распределения, который, как известно, обозначается  $\alpha_{95}$  [Tauxe, 2009].

Имея в виду формулу свертки (7), приведем формулу для плотности распределения направлений на сфере  $\mathbf{p}(\mathbf{u})$  с учетом вклада ошибки фишеровского типа:

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \iint_{S^2} \mathfrak{z}(\mathbf{w}) \mathbf{f}_{\langle \mathbf{w} \rangle}(\mathbf{u}) d\mathbf{w}. \quad (8)$$

Это не что иное как свертка на сфере  $S^2$  плотностей распределений  $\mathfrak{z}(\mathbf{u})$  и  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ . Таким образом, если все измеренные палеомагнитные направления (в данной географической точке) включают в себя одинаково распределенную фишеровскую ошибку, то тестирование модели БГП сводится к проверке соответствия данных статистическому распределению с плотностью  $\mathbf{p}(\mathbf{u})$ .

Рис. 3 дает представление о степени изменчивости формы изолиний углового гауссовского распределения при учете ошибки, например, с  $\alpha_{95}=7^\circ$ .



**Рис. 3.** Форма изолиний модели QC в географической точке с координатами 45° с.ш., 3° з.д. без учета ошибки измерения (а) и с учетом ошибки измерения с  $\alpha_{95}=7^\circ$  (б). Использована проекция Ламберта с центром, определенным чисто дипольным направлением. Звездочка – направление среднего поля по модели QC; грид сетки –  $5 \times 15^\circ$

### Выравнивание

Из элементарного курса теории вероятностей известно, что для произвольной числовой случайной величины  $\xi$  с функцией распределения  $F_\xi(x) = P(\xi < x)$  отображение  $\hat{x} \rightarrow \hat{t}$ , заданное формулой  $\hat{t} = F_\xi(\hat{x})$ , определяет равномерно распределенную на отрезке  $[0, 1]$  случайную величину  $t$ . Обычно этой формулой пользуются в “обратную сторону”, а именно при генерации случайных величин с заданным распределением, если доступен только датчик равномерных случайных чисел  $t$  (подробности см., например, в [Press et al., 2007]). Обобщение этой формулы на случай многомерного случайного вектора  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$  можно отыскать, например, в работе [Rozenblatt, 1952]:

$$\begin{aligned}
 &\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \hat{t} \\
 &\hat{t}_1 = P\left(X_1 < \hat{x}_1\right), \\
 &\hat{t}_2 = P\left(X_2 < \hat{x}_2 \mid X_1 = \hat{x}_1\right), \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\hat{t}_k = P\left(X_k < \hat{x}_k \mid X_1 = \hat{x}_1, \dots, X_{k-1} = \hat{x}_{k-1}\right).
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Таким образом, имеем преобразование  $\left(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k\right) \rightarrow \left(\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_k\right)$ , и, следовательно, проверка на совместность с некоторым заданным распределением набора данных  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$  превращается в проверку многомерной равномерности преобразованных данных. Заметим, что преобразование  $\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \hat{\mathbf{t}}$  не обязательно является взаимно-однозначной заменой координат в смысле, принятом в геометрии, и заведомо не единственно. Например, можно дополнительно применить какое-либо сохраняющее (лебегову) меру отображение  $k$ -мерного куба на себя. То есть помимо формулы выравнивания (9) существует бесконечное множество других формул, также выравнивающих распределение.

Возвращаясь к задаче совместного тестирования данных, относящихся к разным географическим точкам, мы видим, что при отсутствии корреляций (это предположение выполняется для далеко разнесенных во времени лавовых потоков) тестируемые данные можно преобразовать с учетом их гипотетического распределения, связанного с моделью БГП. Затем эти данные объединяются в одну выборку, которая далее подлежит тестированию на равномерность. Если тест покажет отличия от равномерного распределения, то, разумеется, гипотеза о согласованности исходных данных и БГП будет опровергнута. Если равномерность данных подтверждается статистическими тестами, гипотеза не противоречит данным. Так формально решается общий вопрос о статистической согласованности модели и данных; некоторая техническая трудность использования формулы (9), разумеется, может быть преодолена.

В рамках такого подхода привычный геометрический вид палеомагнитных данных, составляющих для каждого географического положения множество точек на соответствующей сфере направлений, скорее всего изменится до полной неузнаваемости. Также есть выбор, какие именно системы координат использовать при исследовании палеомагнитных данных в разных географических точках, чтобы сохранить возможность интерпретации результатов статистического теста в терминах, например, отклонений от среднего поля. Для изучения палеомагнитных направлений был выбран специальный подход к параметризации в разных географических точках – искалось такое преобразование к равномерному распределению, чтобы в новых координатах по возможности сохранялись некоторые привычные геометрические свойства данных. В случае унимодальных распределений, когда плотность распределения направлений имеет один максимум, это преобразование локально имитирует полярные координаты; в самом общем случае (для совсем уж произвольной модели БГП) конструкция несколько громоздка и поэтому здесь изложена не будет. Но реально рассматриваемые модели палеомагнитных вековых вариаций (см. их список в [Хохлов 2012]) унимодальны, или же очень близки к таковым. Следует также заметить, что результаты статистического теста совместности модели и данных не должны зависеть от выбранного выравнивающего преобразования.

Такое преобразование было использовано в [Khokhlov, Hulot, Carlot, 2001; Khokhlov, Hulot, Bouligand, 2006], где оно было названо одномерным выравниванием.

Геометрический смысл этой конструкции состоит в том, что  $\hat{t}$  измеряет (в вероятностных терминах) “уклонения от центра модельных направлений”, т.е. от направления, на котором функция плотности достигает своего максимума. Это направление, как стало ясно из примеров конкретных моделей Констабль–Паркера, вовсе не совпадает с направлением среднего модельного поля. Вместе с этой “радиальной” характеристикой можно рассмотреть, как меняется вероятность попадания в маленькую прямоугольную площадку,

образованную малым элементом  $\delta l$  изолинии плотности и отрезком нормали между двумя близкими изолиниями; эта вероятность пропорциональна  $|\delta l| \times |(\text{grad} \mathbf{p}(\mathbf{u}))^{-1}|$ .

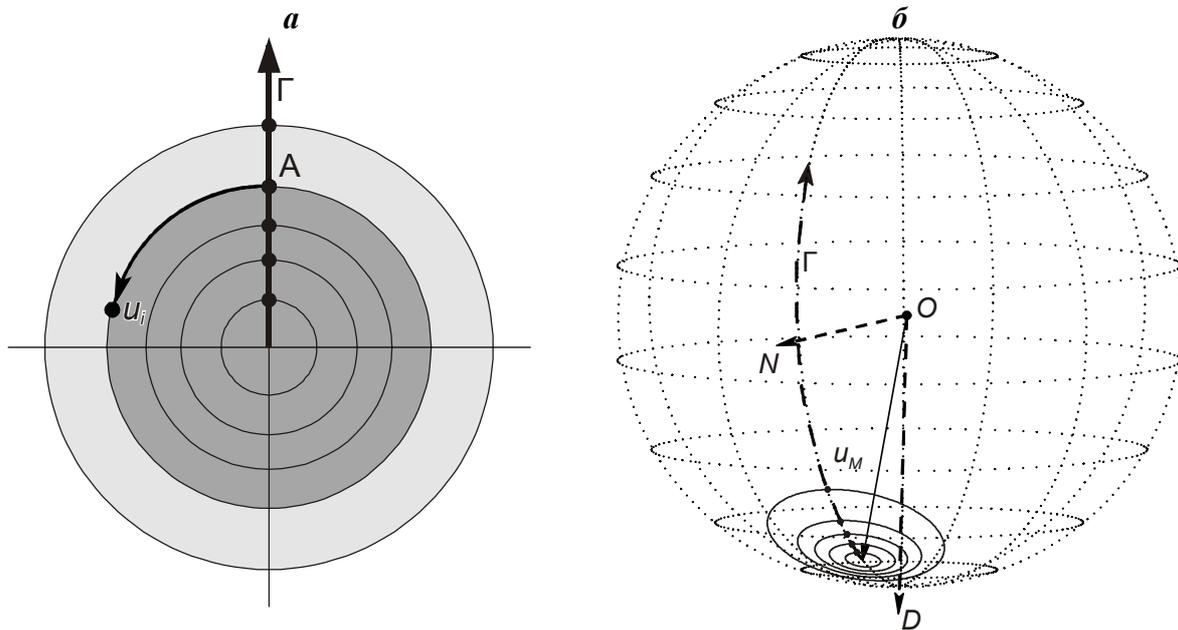
Примем величину  $|(\text{grad} \mathbf{p}(\mathbf{u}))^{-1}| dl$  за дифференциал “угловой” характеристики.

Тогда в единичном квадрате возникает распределение точек  $(\hat{t}, \hat{s})$ :

$$\hat{t} = \iint_{\mathbf{p}(\mathbf{u}) \geq \mathbf{p}(\hat{\mathbf{u}})} \mathbf{p}(\mathbf{u}) dU, \quad \hat{s} = \frac{\int |\text{grad} \mathbf{p}|^{-1} dl}{\int_{\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{p}(\hat{\mathbf{u}}))} |\text{grad} \mathbf{p}|^{-1} dl}, \quad (10)$$

где  $L$  – дуга изолинии  $\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{p}(\hat{\mathbf{u}}))$  между  $\hat{\mathbf{u}}$  и пересечением изолинии с фиксированной кривой  $\Gamma$ .

Схематически это преобразование показано на рис. 4, а; несколько более реалистичная для палеомагнетизма картинка на сфере направлений, измеренных в конкретной географической точке, представлена на рис. 4, б. То, что рассматриваемое преобразование обеспечит равномерное в единичном квадрате распределение, достаточно несложно установить прямым вычислением.



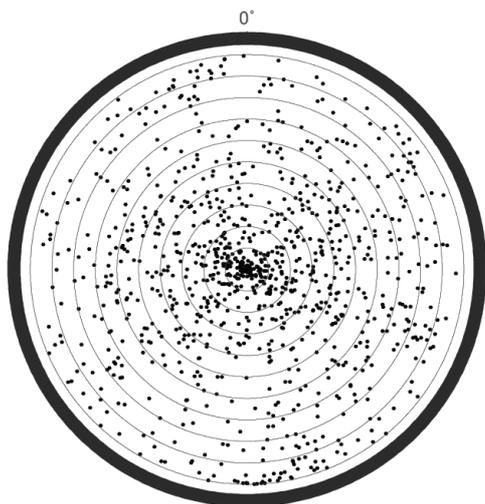
**Рис. 4.** Схема преобразования направления  $\hat{\mathbf{u}} \rightarrow (\hat{t}, \hat{s})$  (а) и пример использования плотности распределения  $\mathbf{s}(\mathbf{u})$ , отвечающей модели QC на единичной сфере направлений  $S^2$ , для этого преобразования (б). Описание см. в тексте

На рис. 4, а показаны изолинии, ограничивающие области, вероятность попадания в которые 10, 30, 50, 70 и 90%; в данном случае они имеют вид окружностей. Фиксированная прямолинейная кривая  $\Gamma$  берёт своё начало в точке, где плотность распределения  $\mathbf{s}$  максимальна, и пересекает проходящую через  $\hat{\mathbf{u}}$  изолинию в точке  $A$ .

Таким образом  $\hat{t}$  – это вероятность попадания в область, ограниченную проходящей через  $\hat{u}$  изолинией (в данном случае  $\hat{t}=0.70=70\%$ ), а  $\hat{s}$  – это отношение длины дуги от  $A$  до  $\hat{u}$ , отсчитываемой против часовой стрелки, к длине всей изолинии (градиент функции плотности во всех точках этой изолинии один и тот же, так как изолиния – окружность).

Приводимый на рис. 4, б пример использования плотности распределения  $\mathfrak{s}(\mathbf{u})$  относится к точке с географическими координатами  $50^\circ$  с.ш. и  $7^\circ$  в.д. Буквой  $O$  обозначен центр сферы направлений; направление на север, отвечающее данному географическому положению, обозначено как  $N$ , направление к центру Земли – как  $D$ . Как и на рис. 4, а показаны изолинии, ограничивающие окрестности моды  $\mathbf{u}_M$  этого распределения при тех же вероятностях попадания в эти окрестности. На этом рисунке кривая  $\Gamma$  – исходящая из  $\mathbf{u}_M$  в направлении на север часть дуги большого круга, определенного плоскостью  $ODN$ .

При рассмотрении палеомагнитных данных, относящихся к разным географическим точкам, можно использовать географически согласованный выбор кривой  $\Gamma$  (на рис. 4, б эта кривая отвечает направлению на север от соответствующего направления максимума плотности распределения). Тогда по преобразованным данным можно хотя бы качественно судить о концентрациях и угловых смещениях исходных данных. Так, опубликованная база Q94, содержащая 990 данных эпохи Брюнес [Quidelleur et al., 1994], с использованием модели QC превращается в распределение точек  $(\hat{t}, \hat{s})$  в двумерном квадрате. Аналогично рис. 4 она представлена в схематичном виде на рис. 5, где точками показаны пары  $(t, 2\pi s)$  в единичном круге. Отметим, что из-за полярного преобразования распределение этих точек в единичном круге не должно быть равномерным.



**Рис. 5.** 990 направлений эпохи Брюнес из базы данных Q94, преобразованных относительно модели QC, в полярных координатах

### Эксперименты с реальными данными эпохи Брюнес

Для дальнейшей проверки совместности распределения преобразованных точек  $(\hat{t}, \hat{s})$  с равномерным 2D распределением в квадрате необходимо использовать стандартные статистические тесты, которых, вообще говоря, много. Можно, например,

начать с проверки равномерности на единичном отрезке одних только последовательностей  $\hat{t}_i$  – именно такой анализ был проведен в [Khokhlov, Hulot, Bouligand, 2006], показавший, что все опубликованные модели БГП, кроме одной, не дают равномерного на отрезке распределения для  $\hat{t}_i$ , причем опровержение дается уже известным тестом Колмогорова–Смирнова. Единственная модель БГП, которая приводит к распределению, неотличимому от равномерного как с точки зрения классического теста Колмогорова–Смирнова, так и несколько более сложного теста Адельсона–Дарлингга, – это модель QC. Аналогичное исследование свойств последовательностей  $\hat{s}_i$  с использованием тех же тестов было проведено в недавней работе [Khokhlov, Hulot, 2013]. и опять модель QC оказалась единственной совместной с данными. Но можно ли при этом полагать, что тем самым надежно установлен факт соответствия вековых вариаций в эпоху Брюнес статистической модели QC? К сожалению, такое суждение пока преждевременно.

Корректное утверждение должно звучать так: ряд изученных баз данных по палеомагнетизму для эпохи Брюнес показывает, что среди опубликованных моделей БГП наиболее статистически точное описание дает модель QC. Действительно,

- базы данных постоянно пополняются, и потому указанное тестирование следует всякий раз заново повторять;

- набор тестов на равномерность также может быть дополнен;

- разные тесты на равномерность не обязаны давать одинаковые ответы для одних и тех же данных.

Так, например, в [Khokhlov, Hulot 2013] были рассмотрены два дополнительных теста на равномерность (см. табл. 2 в названной работе). Один из них – тест [Fasano, Franceschini, 1987] – эвристический и приближительный, но существенно использующий двумерность распределения, не показал значимого отличия распределения 990 пар  $(\hat{t}_i, \hat{s}_i)$  от равномерного 2D распределения; другой – тест Куйпера [Kuiper, 1960] –

существенно использующий то, что точки  $\hat{s}_i$  на самом деле принадлежат окружности, показал статистически значимые отличия от равномерного на окружности распределения. Эти отличия вызваны широко известным, но пока никем никак не объясненным эффектом, согласно которому количество палеомагнитных данных Брюнес с восточным склонением несколько меньше, чем с западным [Wilson, 1970, 1971, 1972]. Изолинии плотности углового гауссова распределения вытянуты по-разному в зависимости от географического положения, градиент в формуле (10) не постоянен, поэтому, вообще говоря, подобная асимметрия склонений вовсе не обязана приводить к тому, что распределение значений  $\hat{s}_i$  будет отличаться от равномерного; но тем не менее тест Куйпера утверждает, что в конкретных данных Q94 такое отличие есть и оно статистически значимо.

Реализация указанных статистических тестов на равномерность для последовательностей  $(\hat{t}_i, \hat{s}_i)$  не слишком сложна; соответствующие программные алгоритмы опубликованы, например, в известном сборнике [Press et al., 2007].

Совершенно иначе обстоит дело с преобразованием выравнивания палеомагнитных данных (формула (10)) – реализация соответствующего алгоритма потребовала

достаточно специальных сведений, например, быстрого преобразования Лежандра–Фурье, вычисления сверток на гладких многообразиях, аппроксимации спецфункций. Описание этих тонкостей частично приведено в написанном автором в 2010–2012 гг. поясняющем тексте к программному пакету (<http://geomag.ipgp.fr/download/PSVT.tgz>).

### Выводы

Количественные описания вековых вариаций магнитного поля Земли удобно формулировать на уровне спектрального представления поля, а именно заданием того, как во времени ведут себя дипольные, квадрупольные и др. компоненты. Достаточное количество данных для статистического исследования набирается лишь за длительный период (скажем, за десятки тысяч лет), но сам характер данных (по вулканитам) не позволяет однозначно восстановить спектральную картину. Таким образом, естественная задача сопоставления теоретических количественных описаний (статистических гипотез) и реальных данных (экспериментально полученных выборок из генеральной совокупности) должна выполняться во всяком случае не в спектральной области.

Предлагается производить проверку статистических гипотез в терминах статистики направлений, которые естественным образом отождествляются в каждом географическом пункте с точками на соответствующей сфере локальных направлений (локальный базис направлений – это направления на север, восток и к центру Земли). Модель Большого Гауссовского Процесса позволяет явно указать ожидаемую в каждом географическом пункте плотность распределения направлений; следовательно, если модель верна, то данные должны быть согласованы с этой плотностью.

Проверка этих согласований на всех данных и будет статистической проверкой гипотезы; при этом необходимо еще правильно учесть ошибки в данных и принадлежность палеомагнитных данных географически разным разрезам. В результате возникает достаточно длинный алгоритм выравнивания данных, который реализует все эти этапы при достаточно понятной в отличие от громоздкой вычислительной схемы математической идее.

Автором изложена именно идейная сторона вопроса; названный алгоритм недавно был реализован и в настоящее время выложен в Интернете для свободного использования (<http://geomag.ipgp.fr/download/PSVT.tgz>). Первые применения алгоритма показали два новых эффекта, первый из которых состоит в том, что алгоритм дает статистически убедительный отрицательный ответ для всех опубликованных ранее моделей БГП кроме одной; второй – в том, что оставшаяся модель БГП также имеет некоторое, на самом деле небольшое, противоречие с данными, которое можно явно распознать как известный ранее, но необъясненный пока эффект Уилсона преобладания в глобальных коллекциях данных направлений с восточным склонением.

В перспективе вопрос выбора модели БГП может быть также решен в рамках предлагаемого подхода, хотя надо помнить, что модель заведомо не может быть единственной. Кроме того, автор разрабатывает принципы тестирования моделей БГП с использованием палеомагнитных данных по осадкам; эти данные принципиально отличаются от данных по вулканитам в смысле учета содержащейся в них ошибки измерения направления древнего поля.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и образования РФ (контракт 14.Z50.31.0017), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-05-00601-а) и Программы фундаментальных исследований ОНЗ РАН № 7 “Геофизические данные: анализ и интерпретация”.

## Литература

- Хохлов А.В.* Моделирование вековых геомагнитных вариаций. Принципы и реализация // Геофизические исследования. 2012. Т. 13, № 2. С.50–61.
- Bingham C.* Distributions on sphere and on the projective plane // Ph. D. thesis. Yale Univ. New Haven, 1964. 152 p.
- Bingham C.* A series expansion for angular gaussian distribution // Watson G.S. (ed.). Statistics on spheres. N-Y.: John Wiley&Sons., 1983. P.226–231.
- Bouligand C., Hulot G., Khokhlov A., Glatzmaier G.A.* Statistical paleomagnetic field modelling and dynamo numerical simulation // Geophys. J. Int. 2005. V. 161. P.603–626. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2005.02613.x.
- Constable C.G., Parker R.L.* Statistics of the geomagnetic secular variation for the past 5 m.y. // J. Geophys. Res. 1988. V. 93 (B10). P.11569–11581.
- Elmaleh A., Valet J.-P., Quidelleur X., Solihin A., Bouquerel H., Tesson T., Mulyadi E., Khokhlov A., Wirakusumah A.D.* Palaeosecular variation in Java and Bawean Islands (Indonesia) during the Brunhes chron // Geophys. J. Int. 2004. V. 157. P.441–454. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2004.02197.x
- Fasano G., Franceschini A.* A multidimensional version of the Kolomogorov-Smirnov test // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1987. V. 225. (1). P.155–170.
- Fisher R.* Dispersion on a sphere // Proc. R. Soc. Lond. A. 1953. V. 217. 1130. P.295–305. DOI: 10.1098/rspa.1953.0064
- Fisher N., Lewis T., Embleton B.* Statistical analysis of spherical data. Cambridge University Press, 1987. 352 p.
- Khokhlov A., Hulot G.* Probability uniformization and application to statistical palaeomagnetic field models and directional data // Geophys. J. Int. 2013. V. 193, N 1. P.110–121. DOI: 10.1093/gji/ggs118.
- Khokhlov A., Hulot G., Carlut J.* Towards a self-consistent approach to palaeomagnetic field modelling // Geophys. J. Int. 2001. V. 145, N 1. P.157–171. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2001.01386.x.
- Khokhlov A., Hulot G., Bouligand C.* Testing statistical palaeomagnetic field models against directional data affected by measurement errors // Geophys. J. Int. 2006. V. 167, N 2. P.635–648. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2006.03133.x.
- Kono M., Tanaka H.* Mapping the Gauss coefficients to the pole and the models of paleosecular variation // J. Geomag. Geoelectr. 1995. V. 47. P.115–130.
- Kuiper N.H.* Tests concerning random points on a circle // Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. A. 1960. V. 63. P.38–47.
- Love J.J., Constable C.G.* Gaussian statistics for palaeomagnetic vectors // Geophys. J. Int. 2003. V. 152, N 3. P.515–565. DOI: 10.1046/j.1365-246X.2003.01858.x.
- Press C., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B.* Numerical Recipes in C++. Third edition. 2007. <http://www.nr.com>.
- Quidelleur X., Courtillot V.* On low-degree spherical harmonic models of paleosecular variation // Phys. Earth Planet. Int. 1996. V. 95, N 1-2. P.55–77. DOI: 10.1016/0031-9201(95)03115-4.
- Quidelleur X., Valet J.-P., Courtillot V., Hulot G.* Long-term geometry of the geomagnetic field for the last five million years: an updated secular variation database // Geophys. Res. Lett. 1994. V. 15. P.1639–1642. DOI: 10.1029/94GL01105.
- Rozenblatt M.* Remarks on a Multivariate Transformation // Ann. Math. Statist. 1952. V. 15, N 3. P.470–472.
- Tauxe L.* Essentials of paleomagnetism. 2009. <http://magician.ucsd.edu/essentials/WebBook.html>.
- Wilson R.L.* Permanent aspects of the Earth's non-dipole magnetic field over upper Tertiary times // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1970. V. 19. P.417–437. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1970.tb06056.x.
- Wilson R.L.* Dipole offset-the time-averaged paleomagnetic field over the past 25 million years // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1971. V. 22. P.491–504.
- Wilson R.L.* Paleomagnetic differences between normal and reversed field sources, and the problem of far-sided and right-handed pole positions // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1972. V. 28. P.295–304.

*Сведения об авторе*

**ХОХЛОВ Андрей Владимирович** – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН. 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 84/32. Тел.: +7(495)3334513. E-mail: fbmotion@yandex.ru

## **PALEOMAGNETIC SECULAR VARIATIONS: STATISTICAL PROPERTIES OF REAL DATA**

A.V. Khokhlov

*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics of the Earth, RAS,  
Moscow, Russia*

**Abstract.** To understand the nature of the paleomagnetic field variations a mathematically rigorous method of testing statistical hypotheses on real paleomagnetic data is required. The lava paleomagnetic data are sparse in time and space, and contain only partial and inaccurate information about the ancient magnetic field vectors. Theoretical descriptions of field variations operate the global parameters that related to the expansion coefficients of the magnetic potential in spherical harmonics (i.e. Gauss coefficients); such a global description allows to specify the vector field at any point of the earth's surface.

An accurate calculation of the field potential is not achievable from only small, set of data fields (for instance, when all the data belong to one region) so a direct comparison between the observable gauss coefficients and the theoretic ones (that is, from a statistical hypothesis of secular variations) seem difficult. The more appropriate question: whether the globally modeled field is compatible with the paleodirections from different site locations. Here the compatibility should be treated in statistical sense and the direct implementation of this test is sophisticated as the directions are not the numerical values and therefore the usual statistical approach fails. This article presents the new method of testing the consistency of paleomagnetic secular variations and paleomagnetic data, together with the results of application to Brunhes paleomagnetic real data

**Keywords:** paleomagnetism, paleosecular variations, Gaussian random process, statistics on spheres.